Kombinatorika előadás — Előadó: Hajnal Péter

2014. 04. 07. — Jegyzetelő: Wiandt Zsófia

Emlékeztető: séta a gráfban: $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_k, v_k$ sorozat ahol

(1.) $v_0, v_1, \dots, v_k \in V$

(2.) $e_1, e_2, \dots, e_k \in E$

(3.) mindegyik ei két végpontja v_{i-1} és v_i $(i=1, 2, \dots, k)$

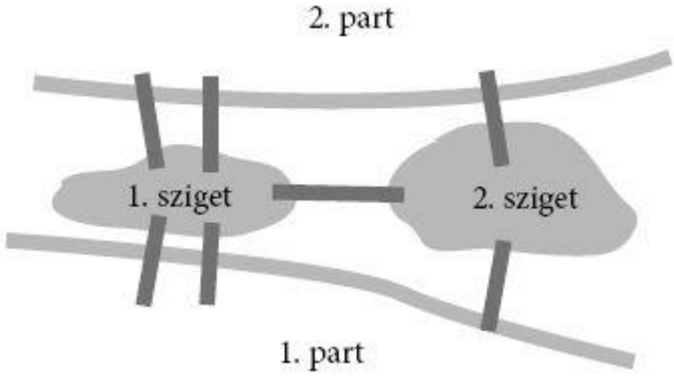
S séta vonal ⇔ e_i-k különbözők

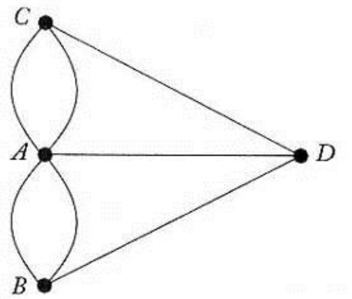
Definíció: S vonal Euler vonal, ha $\{e_1, \dots, e_k\}=E(G)$ és $\{v_0, v_1, \dots, v_k\}=V(G)$

Az Euler vonal az egy olyan séta, amely során minden élen pontosan egyszer haladunk át, és minden csúcsot meglátogatunk.

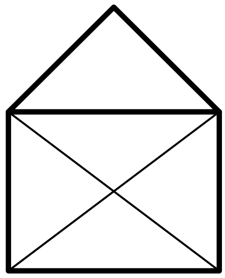
Definíció: S séta $(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_k, v_k)$ esetén ha $v_0=v_k$ (azaz a kiindulópontba érünk vissza a séta végén) akkor S záródó/zárt.

(1.) Königsbergi hidak problémája / végig lehet-e menni az összes hídon úgy, hogy mindegyiken csak egyszer haladunk át? (Euler-vonal)/

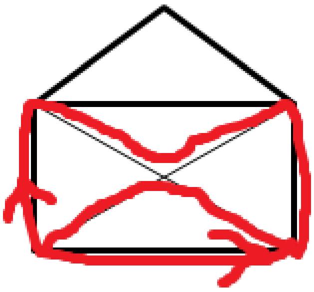




(2.) Fejtörő /Lerajzolható-e kézfelemelés, többszörös átrajzolás nélkül?/



Definíció: mohó vonalnövelés ≡ sétálás, amikor minden lépésnél vigyázunk, hogy ne ismételjünk élt
(szükségszerűen befejeződik, leáll; hossza$\leq$|E(G)|)



vonalnövelés elakadásig (folytatása nem lehetséges)

Definíció: Egy G gráfban mohó vonalnöveléskor a v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, … , e_k, v_k séta elvezet a G gráf egy részéhez, amelyet bejártunk/lerajzoltunk. Ezt B-vel jelöljük:

- csúcsok=V(G)
- élek séta/vonal élei
- végpontok/illeszkedés, ugyanaz, mint G-ben

Egy lényeges észrevétel:

(1.) Ha $v \neq v_0$ és $v \neq v_k$ (azaz v különbözik a kiinduló és a végső csúcstól) akkor $d_B(v)$ páros.

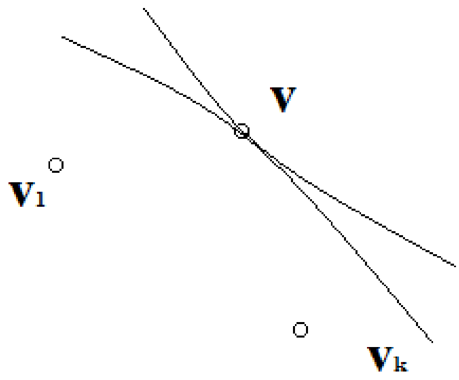
(2.) Ha $v \in \{v_0, v_k\}$, akkor

a.) ha $v_0 \neq v_k$ akkor $d_B(v)$ páratlan.

b.) ha $v_0 = v_k (= v)$ akkor $d_B(v)$ páros.

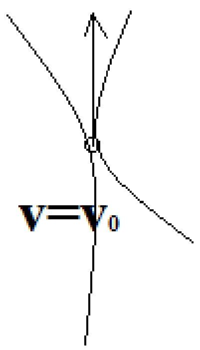
Bizonyítás:

(1.) A séta valahányszor áthalad v-n, az áthaladás B-fokot 2-vel növeli, azaz v foka valóban páros.

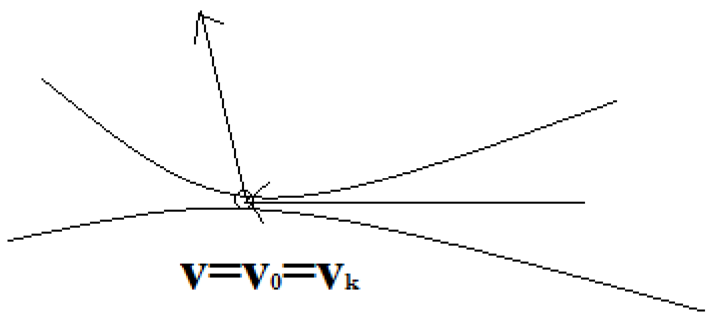


(2.)

a.) Ha $v=v_0\neq v_k$, akkor a séta kiindul v-ből és valahányszor áthalad rajta, így 1+páros=páratlan a B-fok => állítás

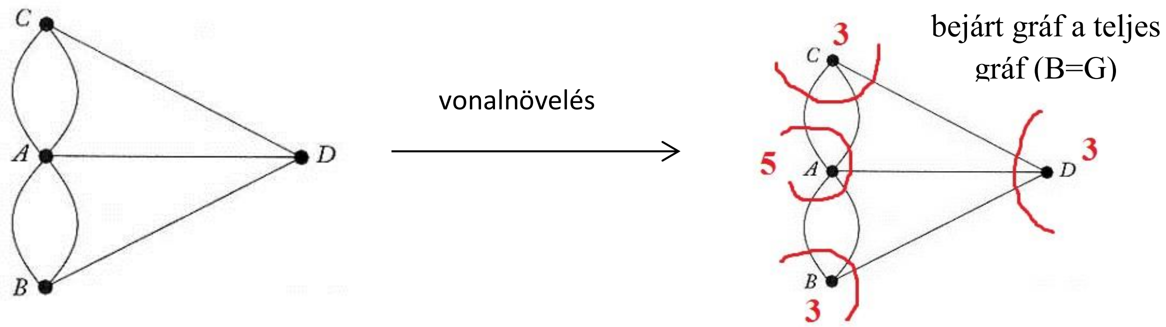


b.) Ha $v=v_0=v_k$ akkor a séta kiindul v-ből, áthalad v-n, befut v-be, így 1+páros+1=2+páros=páros a B fok => állítás



<u>Königsbergi-hidak</u>

Ezek alapján a Königsbergi-hidak problémájára a válasz az, hogy nem lehet úgy végigsétálni, hogy mindegyik hídon csak egyszer haladunk át, és egyúttal visszaérünk a kiindulópontba.



Látható, hogy B=G-ben 4 db páratlan fokú csúcs van, ami az előző, bizonyított észrevételünkkel ellentmondana, ha végig lehetne sétálni úgy a hidakon, hogy mindegyik hídon csak egyszer haladunk végig.

<u>Észrevétel</u>: Ha G-ben van Euler-vonal (B=G), akkor legfeljebb 2 db páratlan fokú csúcsa lehet. Pontosabban:

- Ha az Euler-vonal záródó => 0 db páratlan fokú csúcsa van.
- Ha az Euler-vonal nem záródó => 2 db páratlan fokú csúcsa van.

Euler-vonal létezése esetén bármely csúcsból bármely másikba eljuthatunk. Így gráfunk szükségszerűen összefüggő.

A két állítás megfordítható:

<u>Tétel</u>: Euler-tétel

- G-ben van záródó Euler-vonal ⇔ minden foka páros, és összefüggő.
- G-ben van nem záródó Euler-vonal ⇔ 2 db páratlan fokú csúcs van, és összefüggő.

Az Euler-tétel (első állítása) a következő módon igazolható:

Végezzünk el egy mohó vonalnövelést. Szükségszerűen a kiinduló pontban akadunk el. Ha az egész gráfot bejártuk, akkor készen vagyunk. Ha nem, akkor az összefüggő gráfban lennie kell egy csúcsnak, ahol bejárt és bejáratlan rész is találkozik. Itt szakítsuk meg a sétánkat, és kezdjünk el vonalat növelni a be nem járt éleken. Ez a vonalnövelés szükségszerűen a megszakítás pontjába tér vissza/akad el. Innen folytathatjuk eredeti sétánkat. További ilyen bővítésekkel elérhetjük, hogy a bejárt rész a teljes gráf legyen.